

令和7年度（2025年度）東北大学工学部
3年次編入学試験問題「共通科目」数学

【出題意図】

問題Ⅰは線形代数、問題Ⅱは微積分、問題Ⅲはベクトル解析の標準的な問題です。基礎学力、論理的な思考力や説明能力等について評価します。

令和7年度（2025年度）東北大学工学部
3年次編入学試験問題「共通科目」

数 学

試験時間 10：00～11：20

試験問題 4枚（表紙含む）

解答用紙 6枚

草 案 紙 3枚

※ 以下の(1)，(2)の場合を除き，複製，転載，転用することを禁じます。

(1) 受験予定者が自主学習のために使用する場合

(2) 学校その他の教育機関（営利目的で設置されているものを除く。）の教職員が教育の一環として使用する場合

【 問題 I 】

問 1 行列 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ について以下の問に答えよ.

- (a) 行列 $\mathbf{A}$ の余因子行列 $\tilde{\mathbf{A}}$ と逆行列 $\mathbf{A}^{-1}$ の関係式を行列式 $|\mathbf{A}|$ を用いて示せ.
- (b) 行列 $\mathbf{A}$ の余因子行列 $\tilde{\mathbf{A}}$ と 行列式 $|\mathbf{A}|$ を求めよ.
- (c) 行列 $\mathbf{A}$ の逆行列 $\mathbf{A}^{-1}$ を求めよ.
- (d) 行列 $\mathbf{A}$ を表現行列とする線形変換による, 平面 $2x - y + z = 0$ の像の方程式を求めよ.

問 2 数列 $\{x_n\}, \{y_n\}$ を $n \geq 1$ について次のように定義する. ただし, $x_0 = y_0 = 1$ とする.

$$\begin{aligned} x_n &= 0.6x_{n-1} + 0.2y_{n-1} \\ y_n &= 0.4x_{n-1} + 0.8y_{n-1} \end{aligned}$$

- (a) この数列を, 行列を用いて $\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = \mathbf{B} \begin{pmatrix} x_{n-1} \\ y_{n-1} \end{pmatrix}$ と表すとき, 行列 $\mathbf{B}$ を求めよ.
- (b) 行列 $\mathbf{B}$ の固有値を求めよ.
- (c) 行列 $\mathbf{B}$ を対角化せよ. また, $\mathbf{B}$ を対角化する正則行列 $\mathbf{P}$ を求めよ.
- (d) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{y_n}{x_n}$ を求めよ.

【 問題Ⅱ 】

問 1 次の微分方程式をそれぞれ解け.

(a) $2x^2y' + (x - y)^2 = 0$

(b) $y'' + 4y' + 5y = e^{-2x}$

問 2 領域 $D = \{(x, y) \mid 2 \leq xy \leq 4, x^2 \leq y \leq 3x^2\}$ における関数 $f(x, y) = x^3 + y^3$ について, 以下の問に答えよ.

(a) 変数変換 $u = xy, v = y/x^2$ について, ヤコビアン $\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}$ を求めよ.

(b) 次の重積分を求めよ.

$$\iint_D f(x, y) \, dx dy$$

【 問題 III 】

点 $O(0,0,0)$ を原点とする xyz 空間において、次の問に答えよ.

問1 点 A の座標を $(a,0,0)$, 点 B の座標を $(0,b,0)$, 点 C の座標を $(0,0,c)$ とする. 三角形 $\triangle ABC$ の面積を S とし, 頂点の位置ベクトルを $\mathbf{D} = \overrightarrow{OA}$, $\mathbf{E} = \overrightarrow{OB}$, $\mathbf{F} = \overrightarrow{OC}$ とする.

(a) 面積 S は次式で与えられることを示せ.

$$S = \frac{1}{2} |\mathbf{D} \times \mathbf{E} + \mathbf{E} \times \mathbf{F} + \mathbf{F} \times \mathbf{D}|$$

(b) 面積 S を求めよ.

問2 次のベクトル場 $\mathbf{G}$ の発散を求めよ.

$$\mathbf{G} = (3xy, x^2y, y^2z)$$

問3 次のベクトル場 $\mathbf{H}$ の回転を求めよ.

$$\mathbf{H} = (z, x^2, 2y)$$

問4 xyz 空間における各軸方向の基本ベクトルを $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ とし, 位置ベクトルを $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ とする. また, 球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ と平面 $x + y + z = 1$ の交線を Q とする. このとき, 次のベクトル場 $\mathbf{P}$ の線積分 $\oint_Q \mathbf{P} \cdot d\mathbf{r}$ を求めよ.

$$\mathbf{P} = z\mathbf{i} + 2x\mathbf{j} + 3y\mathbf{k}$$