

令和 8 年度（2026 年度）東北大学工学部
3 年次編入学試験問題「共通科目」数学

【出題意図】

問題Ⅰは線形代数、問題Ⅱは微積分、問題Ⅲはベクトル解析の標準的な問題です。基礎学力、論理的な思考力や説明能力等について評価します。

令和8年度（2026年度）東北大学工学部
3年次編入学試験問題「共通科目」

数 学

試験時間 10：00～11：20

試験問題 4枚（表紙含む）

解答用紙 9枚

草案紙 3枚

※ 以下の(1), (2)の場合を除き, 複製, 転載, 転用することを禁じます。

- (1) 受験予定者が自主学習のために使用する場合
- (2) 学校その他の教育機関(営利目的で設置されているものを除く。)の教職員が教育の一環として使用する場合

【 問題 I 】

行列 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 5 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ について、以下の問に答えよ.

問 1 行列 \mathbf{A} の固有値 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ を求めよ. ただし, $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \lambda_4$ とする.

問 2 問 1 で求めた各固有値に対応する行列 \mathbf{A} の固有ベクトルを大きさ 1 に正規化された形として求めよ.

問 3 行列 \mathbf{A} を対角化する正則行列 \mathbf{P} とその逆行列 \mathbf{P}^{-1} を求めよ.

問 4 行列 \mathbf{A}^n を求めよ. ただし, n は自然数とする.

【 問題Ⅱ 】

以下の問に答えよ.

問1 次の微分方程式を解け.

(a) $\frac{dy}{dx} = y \log x + e^{x \log x - x}$

ただし, x は正の実数とする. また, 対数記号 \log は底を e とする対数, すなわち自然対数を意味するものとする.

(b) $\frac{d^2y}{dx^2} + 2a \frac{dy}{dx} + 4y = 0$

ただし, a は実数とする.

問2 束縛条件 $x^2 + 4y^2 = 1$ のもとで $x - y$ の極値を求めよ.

問3 以下の積分を求めよ.

(a) $\int e^x \sin x \, dx$

(b) $\int_0^1 (1+2x)\sqrt{1-x} \, dx$

【 問題Ⅲ 】

以下の問に答えよ. ただし, \mathbf{i} , \mathbf{j} , \mathbf{k} はそれぞれ直交座標系における x , y , z 方向の単位ベクトルとし, $\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z}\mathbf{k}$ とする.

問1 ベクトル場 $\mathbf{F} = 2xy\mathbf{i} + x^2\mathbf{j} - 2z\mathbf{k}$ について, $\nabla \times \mathbf{F}$ を求めよ.

問2 3次元空間上の任意の点の直交座標 (x, y, z) と極座標 (r, θ, ϕ) の関係は,

$$\begin{aligned} x &= r \sin \theta \cos \phi & r &\geq 0 \\ y &= r \sin \theta \sin \phi & 0 &\leq \theta \leq \pi \\ z &= r \cos \theta & 0 &\leq \phi \leq 2\pi \end{aligned}$$

と与えられる. 3次元空間上の原点を中心とする球面 S およびその外向きの単位法線ベクトル \mathbf{n} に対して, ベクトル場 \mathbf{A} の球面 S 上での面積分は,

$$\iint_S \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} dS = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \mathbf{A} \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \phi} \right) d\theta d\phi$$

で与えられる. ただし, \mathbf{r} は球面 S 上の任意の点の位置ベクトルである.

ここで, 球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ を曲面 S_1 とする. 設問 (a), (b) に答えよ.

(a) ベクトル場 $\mathbf{G} = 4x\mathbf{i} + 4y\mathbf{j} - 2z\mathbf{k}$ に対して曲面 S_1 における面積分 $\iint_{S_1} \mathbf{G} \cdot \mathbf{n} dS$ を求めよ.

(b) 曲面 S_1 において, $z \geq 0$ の範囲で考えた曲面を S_2 とする.

ベクトル場 $\mathbf{H} = y\mathbf{i} - x\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ に対して曲面 S_2 における面積分 $\iint_{S_2} (\nabla \times \mathbf{H}) \cdot \mathbf{n} dS$ を求めよ.