令和 8 年度（2026 年度）東北大学工学部
3 年次編入学試験問題「共通科目」数学

【出題意図】
問題Ⅰは線形代数、問題Ⅱは微積分、問題Ⅲはベクトル解析の標準的な問題です。基礎学力、論理的な思考力や説明能力等について評価します。

令和８年度（2026 年度）東北大学工学部
３年次編入学試験問題「共通科目」

数　学

試験時間　10：00～11：20

試験問題　４枚（表紙含む）

解答用紙　９枚

草 案 紙　３枚

【 問題Ⅰ 】

行列 $\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 5 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ について，以下の問に答えよ．

問１　行列 $\mathbf{A}$ の固有値 λ_1，λ_2，λ_3，λ_4 を求めよ．ただし，$\lambda_1 \leqq \lambda_2 \leqq \lambda_3 \leqq \lambda_4$ とする．

問２　問１で求めた各固有値に対応する行列 $\mathbf{A}$ の固有ベクトルを大きさ１に正規化された形として求めよ．

問３　行列 $\mathbf{A}$ を対角化する正則行列 $\mathbf{P}$ とその逆行列 $\mathbf{P}^{-1}$ を求めよ．

問４　行列 $\mathbf{A}^n$ を求めよ．ただし，n は自然数とする．

【 問題Ⅱ 】

以下の問に答えよ．

問１　次の微分方程式を解け．

(a) $\dfrac{dy}{dx} = y\log x + e^{x\log x - x}$

ただし，x は正の実数とする．また，対数記号 log は底を e とする対数，すなわち自然対数を意味するものとする．

(b) $\dfrac{d^2 y}{dx^2} + 2a\dfrac{dy}{dx} + 4y = 0$

ただし，a は実数とする．

問２　束縛条件 $x^2 + 4y^2 = 1$ のもとで $x - y$ の極値を求めよ．

問３　以下の積分を求めよ．

(a) $\int e^x \sin x \, dx$

(b) $\int_0^1 (1+2x)\sqrt{1-x}\, dx$

【 問題Ⅲ 】

以下の問に答えよ．ただし，$\mathbf{i}$，$\mathbf{j}$，$\mathbf{k}$ はそれぞれ直交座標系における x，y，z 方向の単位ベクトルとし，$\nabla = \dfrac{\partial}{\partial x}\mathbf{i} + \dfrac{\partial}{\partial y}\mathbf{j} + \dfrac{\partial}{\partial z}\mathbf{k}$ とする．

問１　ベクトル場 $\mathbf{F} = 2xy\mathbf{i} + x^2\mathbf{j} - 2z\mathbf{k}$ について，$\nabla \times \mathbf{F}$ を求めよ．

問２　3 次元空間上の任意の点の直交座標 (x, y, z) と極座標 (r, θ, ϕ) の関係は，

$$\begin{aligned} x &= r\sin\theta\cos\phi & \qquad r &\geqq 0 \\ y &= r\sin\theta\sin\phi & \qquad 0 &\leqq \theta \leqq \pi \\ z &= r\cos\theta & \qquad 0 &\leqq \phi \leqq 2\pi \end{aligned}$$

と与えられる．3 次元空間上の原点を中心とする球面 S およびその外向きの単位法線ベクトル $\mathbf{n}$ に対して，ベクトル場 $\mathbf{A}$ の球面 S 上での面積分は，

$$\iint_S \mathbf{A}\cdot\mathbf{n}dS = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \mathbf{A}\cdot\left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta}\times\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \phi}\right)d\theta d\phi$$

で与えられる．ただし，$\mathbf{r}$ は球面 S 上の任意の点の位置ベクトルである．

ここで，球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ を曲面 S_1 とする．設問 (a), (b) に答えよ．

(a) ベクトル場 $\mathbf{G} = 4x\mathbf{i} + 4y\mathbf{j} - 2z\mathbf{k}$ に対して曲面 S_1 における面積分 $\iint_{S_1} \mathbf{G}\cdot\mathbf{n}dS$ を求めよ．

(b) 曲面 S_1 において，$z \geqq 0$ の範囲で考えた曲面を S_2 とする．

ベクトル場 $\mathbf{H} = y\mathbf{i} - x\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ に対して曲面 S_2 における面積分 $\iint_{S_2} (\nabla\times\mathbf{H})\cdot\mathbf{n}dS$ を求めよ．